



**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΔΕΥΤΕΡΑ 19 ΙΟΥΝΙΟΥ 2017
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ**

(Ενδεικτικές Απαντήσεις)

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Απόδειξη σχολικού βιβλίου σελίδα 31
- A2.** Ορισμός σελίδα 14 (προσοχή μόνο το *τοπικό μέγιστο*)
- A3.** Σελίδα 72 σχολικού βιβλίου
- A4.**
- α) Σωστό
 - β) Λάθος
 - γ) Λάθος
 - δ) Σωστό
 - ε) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

- B1. (α)** Για την εύρεση της μέσης τιμής κατασκευάζουμε μια επιπλέον στήλη η οποία περιέχει τα γινόμενα $x_i \cdot v_i$ όπως φαίνεται παρακάτω :

x_i	v_i	$x_i \cdot v_i$
1	2	2
3	3	9
5	4	20
9	1	9
Σύνολο	10	40

$$\text{Επομένως } \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^4 x_i \cdot v_i}{v} \Leftrightarrow \bar{x} = \frac{40}{10} \Leftrightarrow \bar{x} = 4$$

(β) Έχουμε συνολικά 10 παρατηρήσεις (άρτιος) επομένως η διάμεσος είναι :

$$\delta = \frac{5^{\text{η}} \text{ παρατήρηση} + 6^{\text{η}} \text{ παρατήρηση}}{2}$$

Κατασκευάζοντας στον αρχικό πίνακα την στήλη της αθροιστικής συχνότητας

x_i	v_i	N_i
1	2	2
3	3	5
5	4	9
9	1	10
Σύνολο	40	

προκύπτει ότι η 5^η παρατήρηση είναι ο αριθμός **3** ενώ η 6^η παρατήρηση είναι ο αριθμός **5** άρα :

$$\delta = \frac{3+5}{2} \Leftrightarrow \delta = 4$$

(γ) Για τη εύρεση της διακύμανσης κατασκευάζουμε τις παρακάτω στήλες για να

εφαρμόσουμε τον τύπο : $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^4 (x_i - \bar{x})^2 \cdot v_i}{v}$, επομένως έχουμε :

x_i	v_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 \cdot v_i$
1	2	-3	9	18
3	3	-1	1	3
5	4	1	1	4
9	1	5	25	25
Σύνολο	10			50

Ισχύει :

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^4 (x_i - \bar{x})^2 \cdot v_i}{v} \Leftrightarrow s^2 = \frac{50}{10} \Leftrightarrow s^2 = 5$$

B2. Για να εξετάσουμε αν το δείγμα είναι ομοιογενές αρκεί να βρούμε το συντελεστή μεταβολής CV .

$$CV = \frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{\sqrt{5}}{4} = \frac{25\sqrt{5}}{100} > \frac{10}{100} \text{ άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές .}$$

Όπου: $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{5}$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με παράγωγο

$$f'(x) = (x^2 - x + 1)' \Leftrightarrow f'(x) = 2x - 1$$

Βρίσκουμε τις ρίζες και το πρόσημο της f'

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x - 1 > 0 \Leftrightarrow 2x > 1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 2x - 1 < 0 \Leftrightarrow 2x < 1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$$

Το πρόσημο της f' και τα διαστήματα μονοτονίας της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα :

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
f		\searrow	\nearrow

Στο διάστημα $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα ενώ στο διάστημα $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ είναι γνησίως αύξουσα .

Για $x = \frac{1}{2}$ η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο με τιμή

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + 1 \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$$

Γ2. Το σημείο $A(2, f(2))$ είναι το $A(2, 3)$ διότι το $f(2) = 2^2 - 2 + 1 \Leftrightarrow f(2) = 3$

Ο συντελεστής διεύθυνσης της εξίσωσης εφαπτομένης της f στο A είναι

$$\lambda = f'(2) \Leftrightarrow \lambda = 3$$

Έστω $(\varepsilon): y = \lambda x + \beta$ η εξίσωση εφαπτομένης της f στο A , τότε εφόσον το σημείο A ανήκει στην (ε) οι συντεταγμένες του την επαληθεύουν επομένως:

$$3 = 3 \cdot 2 + \beta \Leftrightarrow \beta = -3$$

άρα η εξίσωση εφαπτομένης είναι

$$(\varepsilon): y = 3x - 3$$

Γ3. Για να βρω τα σημεία τομής της (ε) με το άξονα $x'x$ λύνουμε την εξίσωση

$$y = 0 \Leftrightarrow 3x - 3 = 0 \Leftrightarrow 3x = 3 \Leftrightarrow x = 1, \text{ επομένως η } (\varepsilon) \text{ τέμνει τον άξονα } x'x$$

στο σημείο $B(1, 0)$.

Για να βρω τα σημεία τομής της (ε) με το άξονα $y'y$ αντικαθιστούμε $x = 0$ στην εξίσωση της (ε) οπότε: $y = -3$ άρα η (ε) τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $\Gamma(0, -3)$

Γ4.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{f(x)} - 1}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x^2 - x + 1} - 1)(\sqrt{x^2 - x + 1} + 1)}{(x - 1)(\sqrt{x^2 - x + 1} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x^2 - x + 1})^2 - 1^2}{(x - 1)(\sqrt{x^2 - x + 1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x + 1 - 1}{(x - 1)(\sqrt{x^2 - x + 1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x - 1)}{(x - 1)(\sqrt{x^2 - x + 1} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{\sqrt{x^2 - x + 1} + 1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

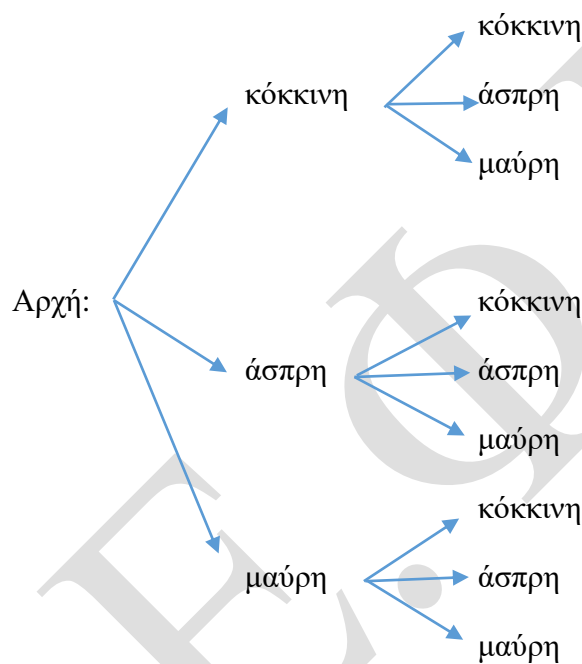
ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Ορίζουμε τα παρακάτω ενδεχόμενα

α: Η μπάλα είναι άσπρη

μ: Η μπάλα είναι μαύρη

κ: Η μπάλα είναι κόκκινη



Ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι

$$\Omega = \{αα, αμ, ακ, μα, μμ, μκ, κα, κμ, κκ\}$$

Δ2. Τα ενδεχόμενα A και B με αναγραφή των στοιχείων τους είναι τα παρακάτω

$$A = \{αμ, μμ, κμ\} \text{ και } B = \{ακ, αμ, μα, μκ, κα, κμ\}$$

Δ3. Με βάση τα Δ1, Δ2 έχουμε $N(\Omega) = 9$, $N(A) = 3$, $N(B) = 6$

Υπολογίζουμε τις πιθανότητες των ενδεχομένων A και B

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} \Leftrightarrow P(A) = \frac{3}{9} \Leftrightarrow P(A) = \frac{1}{3}$$

και

$$P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} \Leftrightarrow P(B) = \frac{6}{9} \Leftrightarrow P(B) = \frac{2}{3}$$

Για την πιθανότητα του ενδεχομένου A' έχουμε :

$$P(A') = 1 - P(A) \Leftrightarrow P(A') = 1 - \frac{1}{3} \Leftrightarrow P(A') = \frac{2}{3}$$

Το ενδεχόμενο $A \cap B$ αποτελείται από τα κοινά στοιχεία των ενδεχομένων A και B επομένως

$$A \cap B = \{\alpha\mu, \kappa\mu\} \text{ με } N(A \cap B) = 2$$

επομένως

$$P(A \cap B) = \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)} \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{2}{9}$$

Για την πιθανότητα του ενδεχομένου $A - B$ έχουμε :

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{3}{9} - \frac{2}{9} = \frac{1}{9}$$

Για την πιθανότητα του ενδεχομένου $B - A$ έχουμε :

$$P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{6}{9} - \frac{2}{9} = \frac{4}{9}$$

β. Εφόσον τα ενδεχόμενα A, Γ και B, Γ είναι ασυμβίβαστα το $\Gamma \subseteq (A \cup B)'$

άρα $P(\Gamma) \leq P((A \cup B)')$ επομένως η μεγαλύτερη τιμή του $P(\Gamma)$ είναι όταν :

$$P(\Gamma) = P((A \cup B)') \Leftrightarrow P(\Gamma) = 1 - P(A \cup B) \Leftrightarrow P(\Gamma) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B))$$

$$\Leftrightarrow P(\Gamma) = 1 - \left(\frac{3}{9} + \frac{6}{9} - \frac{2}{9} \right) \Leftrightarrow P(\Gamma) = \frac{2}{9}$$