Θέμα Α

Α1.Θεωρία σελίδα 135

Α2.Θεωρία σελίδα 51

Α3.Θεωρία σελίδα 23

Α4. Σ-Λ-Σ-Σ-Σ

Θέμα Β

Β1. Θέτουμε $y = x+1, x \in \mathbb{R}$. Επομένως $x = y-1$. Συνεπώς και $y \in \mathbb{R}$.

Επομένως για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $y \in \mathbb{R}$ έχουμε: $f(x+1) = (x+1)e^{-x} \Leftrightarrow f(y) = ye^{1-y}$

Άρα $f(x) = xe^{1-x}, x \in \mathbb{R}$.

Β2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως γινόμενο παραγωγίσιμων (η e^{1-x} ως σύνθεση) με $f'(x) = (1-x)e^{1-x}$.

Για κάθε χ που ανήκει στο R έχουμε:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (1-x)e^{1-x} = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow (1-x)e^{1-x} > 0 \overset{e^{1-x}>0}{\Leftrightarrow} x < 1$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow (1-x)e^{1-x} < 0 \overset{e^{1-x}>0}{\Leftrightarrow} x > 1$

Η f είναι συνεχής στο $(-\infty,1]$ και $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\infty,1)$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,1]$.

Η f είναι συνεχής στο $[1,+\infty)$ και $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (1,+\infty)$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$.

Επίσης $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\infty,1)$, $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (1,+\infty)$ και η f είναι συνεχής στο 1άρα η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο 1 το $f(1) = 1$.

Β3.

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων (η e^{1-x} ως σύνθεση) με $f''(x) = (x-2)e^{1-x}$.

Για κάθε χ που ανήκει στο R έχουμε:

$f''(x)=0 \Leftrightarrow (x-2)e^{1-x}=0 \Leftrightarrow x=2$

$f''(x)>0 \Leftrightarrow (x-2)e^{1-x}>0 \overset{e^{1-x}>0}{\Leftrightarrow} x>2$

$f''(x)<0 \Leftrightarrow (x-2)e^{1-x}<0 \overset{e^{1-x}>0}{\Leftrightarrow} x<2$

Η f είναι συνεχής στο $(-\infty,2]$ και $f''(x)<0$ για κάθε $x\in(-\infty,2)$ άρα η f είναι κοίλη στο $(-\infty,2]$.

Η f είναι συνεχής στο $[2,+\infty)$ και $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(2,+\infty)$ άρα η f είναι κυρτή στο $[2,+\infty)$.

Επίσης $f''(x)<0$ για κάθε $x\in(-\infty,2)$, $f''(x)>0$ για κάθε $x\in(2,+\infty)$ και στο $(2,f(2))$ ορίζεται η εξίσωση της εφαπτομένης η f το $(2,f(2))$ δηλαδή το $\left(2,\frac{2}{e}\right)$

είναι σημείο καμπής της C_f.

Η f είναι συνεχής στο ' επομένως δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\cdot e}{e^x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e}{e^x}=0$ Επομένως η $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ της C_f.

Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}e^{1-x} \overset{u=1-x}{=} \lim\limits_{u\to+\infty}e^{u}=+\infty$ η C_f δεν έχει ασύμπτωτη στο $-\infty$.

B4.i)Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A_1=(-\infty,1]$ συνεπώς

$f(A_1)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), f(1)\right]=(-\infty,1]$

διότι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(xe^{1-x}\right)=-\infty$ και $f(1)=1$

Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A_2=[1,+\infty)$ συνεπώς

$f(A_2)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), f(1)\right]=(0,1]$

Επομένως έχουμε $f(\text{'})=f(A_1)\cup f(A_2)=(-\infty,1]$.

ii) Αν $\lambda\le 0$ τότε $\lambda\in f(A_1)$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο A_1 η εξίσωση $f(x)=\lambda$ έχει μοναδική λύση.

Αν $\lambda \in (0,1)$ έχουμε ότι $\lambda \in f(A_1)$ και $\lambda \in f(A_2)$.Η f είναι γνησίως αύξουσα στο A_1 και στο A_2 άρα οι ρίζες της εξίσωσης $f(x)=\lambda$ είναι μοναδικές

Αν $\lambda = 1$ έχουμε $f(x)=1 \Leftrightarrow x=1$ διότι η f μόνο στο 1 παρουσιάζει ολικό μέγιστο το 1.

Αν $\lambda > 1$ η εξίσωση $f(x)=\lambda$ είναι αδύνατη διότι το σύνολο τιμών της f είναι το (-oo,1]

Θέμα Γ

Γ1.Η f είναι συνεχής στο $(-\infty,0)$ ως πολυωνυμική και στο $(0,+\infty)$ ως τριγωνομετρική.

Επίσης $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \sigma\upsilon\nu x = 1$ και $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=1$ συνεπώς $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1 = f(0)$.

Επομένως η f είναι συνεχής στο 0 άρα είναι συνεχής στο $\left(-\infty, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Επίσης έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\left(ax^3-3x^2-x\right)=0$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=0$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \neq \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Γ2. i)Η f είναι συνεχής στο $\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$.Όμως

$$f(0)=1$$

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{2}=0$$

Επομένως δεν ικανοποιούνται όλες οι προυποθέσεις του θεωρήματος Rolle.

ii)

Έχουμε $f'(x) = -\eta\mu x, x \in \left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$

Για κάθε $x \in \left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$ έχουμε:

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \eta\mu x=0 \Leftrightarrow x=\kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}$.

Όμως $0<\kappa\pi \leq \dfrac{3\pi}{2} \Leftrightarrow 0<\kappa \leq \dfrac{3}{2} \overset{\kappa\in\mathbb{Z}}{\Leftrightarrow} \kappa=1$

Επομένως $x=\pi$ άρα $\xi=\pi$.

Γ3.Έχουμε $f'(x)=3ax^2-6x-1, x<0$ και επειδή $\Delta=36+12\alpha=12(\alpha+3)<0$ η εξίσωση $f'(x)=0$ είναι αδύνατη στο $(-\infty,0)$.

Άρα δεν υπάρχουν σημεία με αρνητική τετμημένη στα οποία η εφαπτομένη να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

Γ4.Επειδή $a<-3$ και $\Delta<0$ έχουμε ότι $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)$.Η f είναι συνεχής στο $(-\infty,0]$ συνεπώς είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$

Άρα για κάθε $x\leq 0 \overset{f \, 2 \, (-\infty,0]}{=>} f(x)\geq f(0)=1\geq -1$

Επίσης όπως γνωρίζουμε $\sigma\upsilon\nu x\geq -1$ για κάθε $x\in\left(0,\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

Άρα για κάθε $x\in\left(-\infty,\dfrac{3\pi}{2}\right]$ ισχύει $f(x)\geq -1$.

Θέμα Δ.

Δ1.Η εξίσωση ορίζεται αν και μόνο αν:

$$\left.\begin{cases} x>0 \\ x\neq 0 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow x>0$$

Για κάθε $x>0$ έχουμε: $\ln x=\dfrac{1}{x} \Leftrightarrow \ln x-\dfrac{1}{x}=0$

Θεωρούμε την $g(x)=\ln x-\dfrac{1}{x}, x>0$.

Η g είναι συνεχής στο $[1,e]$ ως γινόμενο συνεχών και $g(1)g(e)=(-1)\left(\dfrac{e-1}{e}\right)<0.$

Από το θεώρημα Bolzano έχουμε ότι η εξίσωση $g(x)=0 \Leftrightarrow \ln x=\dfrac{1}{x}$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1,e)$.

Όμως $g'(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ άρα $1-1$ άρα η ρίζα μοναδική.

Δ2.Για κάθε $x>0$ έχουμε: $f(x)=\dfrac{x+1}{x_0}-\ln x-1$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=\dfrac{1}{x_0}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-x_0}{x\cdot x_0}$.Επομένως για κάθε $x>0$ έχουμε:

$f'(x)=0\Leftrightarrow x=x_0$

$f'(x)>0\overset{x\cdot x_0>0}{\Leftrightarrow} x>x_0$

$f'(x)<0\overset{x\cdot x_0>0}{\Leftrightarrow} 0<x<x_0$

Άρα έχουμε ότι $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(0,x_0)$, $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(x_0,+\infty)$ και η f είναι συνεχής στο x_0 άρα η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο x_0 το

$$f(x_0)=\frac{x_0+1}{x_0}-\ln x_0-1=1+\frac{1}{x_0}-\ln x_0-1\overset{\Delta 1}{=}0.$$

Δ3. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε θα λύσουμε την εξίσωση $h(x)=g(x)$

Αν $x\le 0$ είναι προφανώς αδύνατη διότι $xe^{-x}\le 0$ ενώ $h(x)>0$

Αν $x>0$ έχουμε:

$$g(x)=h(x)\Leftrightarrow xe^{-x}=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}\underset{xe^{-x},\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}\in(0,+\infty)}{\overset{\ln x:1-1(0,+\infty)}{\Leftrightarrow}}\ln x-x=(x+1)\ln x_0-x-1\Leftrightarrow \ln x_0(x+1)-\ln x-1=0\Leftrightarrow f($$

Διότι όπως είδαμε η f μόνο στο x_0 παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το 0.

Για να αποδείξουμε ότι έχουν και κοινή εφαπτομένη αρκεί

$$g'(x_0)=h'(x_0)\Leftrightarrow e^{-x_0}-x_0e^{-x_0}=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1}(\ln x_0-1)\overset{\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1}=x_0e^{-x_0}}{\Leftrightarrow} e^{-x_0}-x_0e^{-x_0}=x_0e^{-x_0}(\ln x_0-1)\Leftrightarrow$$

$$1-x_0=x_0\ln x_0-x_0\Leftrightarrow \ln x_0=\frac{1}{x_0}$$

Που ισχύει από το ερώτημα Δ1.

Δ4.Έστω d η απόσταση των σημείων Α και Β

Έχουμε $d(x)=|f(x)-\varphi(x)|=f(x)-\varphi(x), x>0.$

Έστω ότι η φ δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0.Τότε είναι κρισιμο σημείο.

Αν η φ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 έχουμε

$d(x) \geq d(x_0)$ για κάθε $x > 0$.

Η d παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο x_0 το x_0 εσωτερικό και η d παραγωγίσιμη ,άρα από το θεώρημα Fermat έχουμε $d'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = \varphi'(x_0) \Leftrightarrow \varphi'(x_0) = 0$

Αφού όπως είδαμε στο $\Delta 1$ $f'(x_0) = 0$.

Άρα και σε αυτή την περίπτωση το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της φ