

# ΤΕΛΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ 2024

## ΘΕΜΑ Α

**A1.** Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα Fermat  
/7 μονάδες

**A2.** Να διατυπώσετε το Κριτήριο Παρεμβολής  
/4 μονάδες

**A3.** Να διατυπώσετε το Θεμελιώδες θεώρημα ολοκληρωτικού  
Λογισμού  
/4 μονάδες

**A4.** Να χαρακτηρίσετε Σωστό ή Λάθος τις παρακάτω προτάσεις:

1. Έστω συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  γνησίως αύξουσα με

$f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ , τότε ισχύει  $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1}$

2. Ισχύει  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$

3. Έστω συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  συνεχής για την οποία ισχύουν  $f(2022)=2$  και  $f(2023)=1$ . Τότε υπάρχει  $\chi \in Df$  τέτοιο ώστε  $f(\chi)=\sqrt{2}$

4. Αν  $Df=[a,b]$  και  $f''(a)=0$  τότε η  $f$  έχει σημείο καμπής.

5. Αν οι  $f, g$  συνεχείς στο  $[a,b]$  και ισχύει  $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$  τότε θα ισχύει  $f(x)=g(x)$  για κάθε  $x \in [a,b]$ .

## ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f$  και  $g$  με τύπους  $f(x)=\ln(x^2-1)$ ,  $x>1$   
και  
 $g(x)=e^x$ ,  $x \in \mathbb{R}$

**B1.** Να ορίσετε την  $h=f \circ g$ .

/4 μονάδες

Έστω ότι  $h(x)=\ln(e^{2x}-1)$ ,  $Dh=(0,+\infty)$

**B2.** Να προσδιορίσετε την  $h^{-1}$

/6 μονάδες

**B3.** Να αποδείξετε ότι η  $C_h$  δεν έχει σημεία καμπής και να βρείτε τις ασύμπτωτές της.

/5 μονάδες

**B4.** Με βάση τα παραπάνω ερωτήματα, να χαράξετε τη  $C_h$   
και τη  $C_{h^{-1}}$  στο ίδιο σύστημα αξόνων.

/4 μονάδες

**B5.** Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $h$   
στο  $A(1, h(1))$  και να αποδείξετε ότι

$$h(x) - \ln(e^2 - 1) \leq \frac{2e^2}{e^2 - 1}x - \frac{2e^2}{e^2 - 1}$$

/3 μονάδες

# ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x & x \in (0, \pi] \\ 2x^2 + x - 1 & x \leq 0 \end{cases}$$

**Γ1.** Να εξετάσετε αν ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής στο  $[0, \pi]$

/4 μονάδες

**Γ2.** Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$ , τον άξονα  $x'x$  και την ευθεία  $x=\pi$

/7 μονάδες

**Γ3.** Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης  $f(x) - \lambda = 0$  για τις διάφορες τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$

/7 μονάδες

**Γ4.** Μετά τον τελικό της Ευρωλίγκας και έχοντας κατακτήσει το τρόπαιο, η ομάδα του Ολυμπιακού μέσα στο αεροπλάνο της επιστροφής  $A(x, y)$  κατεβαίνει στο Ελευθέριος Βενιζέλος για προσγείωση. Το αεροπλάνο κινείται σε τροχιά κατά μήκος της  $c_f$  με  $x \leq 0$ .

Τη χρονική στιγμή  $t=t_0$  η κλίση της  $f$  στο σημείο  $A$  είναι  $-10 \text{ km/min}$  και η τετμημένη του  $A$  μεταβάλλεται με ρυθμό  $2 \text{ km/min}$ . Να βρείτε την τετμημένη του  $A$  τη χρονική στιγμή  $t_0$ .

/7 μονάδες

## ΘΕΜΑ Δ

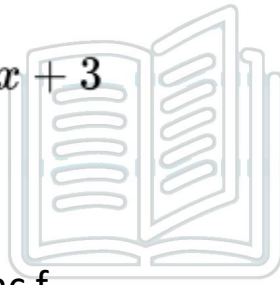
Έστω  $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$  παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει:

- $f'(x) = 2f(x)$
- $f(0) = 1$

**Δ1. i.** Να αποδείξετε ότι η  $h$  με τύπο

$$h(x) = \ln(f(x)) - 2x + 3$$

είναι σταθερή



/3 μονάδες

**ii.** Να βρεθεί ο τύπος της  $f$

/2 μονάδες

Έστω ότι  $f(x) = e^{2x}$



**Δ2.** Έστω συνάρτηση  $g$  με τύπο

$$\frac{\ln\left(\frac{\ln(f(x))}{2}\right)}{x-1}$$

με  $x \in (0,1) \cup (1, +\infty)$

**i.** Να δείξετε ότι για κάθε  $x > 1$ , ισχύει  $2k(x+2) - k(x+1) > k(x+3)$

Όπου  $k(x) = g'(x)x(x-1)^2$

/5 μονάδες

**ii.** Αν  $G$  μία παράγουσα της  $g$ , να δείξετε ότι η  $G$  δεν δέχεται οριζόντια εφαπτομένη

/3 μονάδες

**Δ3.** Να αποδείξετε ότι

$$(e - 1) \int_e^{e^2} k(x) dx \geq \frac{-e^5}{5} + e^4 - \frac{3e^3}{2} + 2e^2 - e$$

/6 μονάδες

**Δ4.** Αν επιπλέον για τη συνάρτηση  $G$  ισχύει  $G(4-x) + G(x) = 0$   
Να λύσετε την εξίσωση  $G(x)=0$ , για κάθε  $x>1$ .

/6 μονάδες



**ΚΟΡΥΦΗ**

ΨΗΦΙΑΚΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

Τριανταφύλλου Βαγγέλης Μαθηματικός  
Κουλμανδασ Παναγιώτης Μαθηματικός